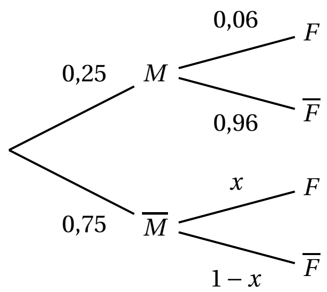
Corrigé du baccalauréat S – Nouvelle Calédonie 26 novembre 2019

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. D'apr7s l'énoncé $P(M) = 0{,}25$, donc $P\left(\overline{M}\right) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. D'autre part $P_M(F) = 0{,}06$.
Donc $P_M\left(\overline{F}\right) = 1 - 0{,}06 = 0{,}96$.
On peut commencer l'arbre pondéré :



Il faut trouver $P_F(M) = \dfrac{P(F\cap M)}{P(F)} = \dfrac{P(M\cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(M)\times P_M F}{P(F)} = \dfrac{0{,}25\times 0{,}06}{0{,}0225} = \dfrac{0{,}0150}{0{,}225} = \dfrac{150}{225} = \dfrac{3\times 50}{9\times 25} = \dfrac{3\times 2\times 25}{3\times 3\times 25} = \dfrac{2}{3}$.

3. Soit $x = P_{\overline{M}}(F)$.
On sait d'apr7s la loi des probabilités totales que :
$P(F) = P(M\cap F) + P\left(\overline{M}\cap F\right)$ soit d'après l'énoncé :
$0{,}0225 = 0{,}25\times 0{,}06 + 0{,}75\times x \iff 0{,}0225 = 0{,}0150 + 0{,}75x \iff 0{,}75x = 0{,}0075 \iff x = 0{,}01$.
La probabilité qu'un carreau avec motif soit fissuré est égale à 1 %.

Partie B

1. On a donc $P(10{,}1 \leqslant X \leqslant 11{,}9) = 0{,}99$, donc :
$P(X \leqslant 10{,}1) + P(X \geqslant 11{,}9) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$.
Mais par symétrie $P(X \leqslant 10{,}1) = P(X \geqslant 11{,}9)$, donc
$P(X \leqslant 10{,}1) = P(X \geqslant 11{,}9) = \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}005$.
2.
$$Z = \frac{X-11}{\sigma}.$$
   a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
   b. De $10{,}1 \leqslant X \leqslant 11{,}9$ on en déduit successivement :
   $-0{,}9 \leqslant X - 11 \leqslant 0{,}9 \iff -\dfrac{0{,}9}{\sigma} \leqslant \dfrac{X-11}{\sigma} \leqslant \dfrac{0{,}9}{\sigma}$ et d'après la question **1.**
   $P\left(Z \leqslant -\frac{0{,}9}{\sigma}\right) = 0{,}005$.
   c. La calculatrice donne $\sigma \approx 0{,}35$ au centième près.

Partie C

$$f(x) = -1{,}5\cos(x) + 1{,}5$$

1. f est dérivable sur $[0~;~2\pi]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -1{,}5 \times (-\sin x) = 1{,}5\sin x$.
On sait que sur $[0~;~\pi], \sin(x) \geqslant 0$ et donc $f'(x) \geqslant 0$ et
que sur $[\pi~;~2\pi], \sin x \leqslant 0$ et donc $f'(x) \leqslant 0$.
La fonction f est donc croissante sur $[0~;~\pi]$ de $f(0) = -1{,}5 + 1{,}5 = 0$ à $f(\pi) = -1{,}5 \times (-1) + 1{,}5 = 3$, puis décroissante de $f(\pi) = 3$ à $f(2\pi) = -1{,}5 + 1{,}5 = 0$.
Conclusion : sur $[0~;~2\pi]$, $f(x) \geqslant 0$.
2. La forme d'un carreau est celle de la zone délimitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
La fonction f étant positive l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_1$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2\pi$ est égale (en unité d'aire à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ et par raison évidente de symétrie l'aire du carreau est égale à :
$2\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{2\pi} [f(x)] - 1{,}5\cos x + 1{,}5]\,\mathrm{d}x = 2\left[-1{,}5\sin x + 1{,}5x\right]_0^{2\pi} =$
$2(0 + 1{,}5 \times 2\pi - (-1{,}5 \times 0 + 1{,}5 \times 0) = 2 \times 3\pi = 6\pi$ (unité d'aire).

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \ln\left(\dfrac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{1} = 3$ et finalement
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 3$.
Ce résultat montre que géométriquement la droite d'équation $y = \ln 3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.
2. **a.** f est la composée de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{u'}{u}$.
Avec $u(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$, on a $u'(x) = \dfrac{3(x+1) - 1 \times (3x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.
Donc $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \dfrac{2}{(3x+1)(x+1)}$.
b. $f'(x)$ quotient de nombres supérieurs à zéro est supérieure à zéro, donc f est strictement croissante sur $[0~;~+\infty]$ de $f(0) = \ln\frac{1}{1} = 0$ à $\ln 3$.

Partie B

1. *Initialisation* : $u_0 = 3$ et $u_1 = \ln\left(\dfrac{9+1}{3+1}\right) = \ln\frac{10}{4} = \ln\frac{5}{2} \approx 0{,}92$.
On a bien $\dfrac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang 0.
Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Par croissance (démontrée en **A. 2.**) de la fonction f, on a :
$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

Or $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}\right) = \left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 0{,}51 > 0{,}5$.

On a donc l'encadrement $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, il est vrai au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on a donc démontré que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. Le résultat précédent montre que le suite (u_n) est décroissante et minorée par $\dfrac{1}{2}$: elle converge donc vers une limite supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$, donc positive.

Partie C

1. Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $[x_0\ ;\ +\infty[$, la fonction g décroit de $g(x_0) \approx 0{,}088 > 0$ à $-\infty$.

Elle est continue sur cet intervalle car dérivable, donc d'après le principe des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [x_0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Comme $x_0 > 0$, $\alpha > 0$.

2.

a.

$x \leftarrow 0{,}22$
Tant que $g(x) > 0$ faire
$\quad\quad x \leftarrow x + 0{,}01$
Fin de Tant que

b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{2}{5}\right)$

1. I est le centre du carré ADHE, donc en particulier I est le milieu du segment [DE], donc $\mathrm{I}\left(\frac{0+0}{2}\ ;\ \frac{1+0}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2}\right)$ soit $\mathrm{I}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

a. Avec $\mathrm{F}(1\,;\,0\,;\,1)$, $\mathrm{I}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{J}\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{2}{5}\right)$, on obtient :

$\overrightarrow{\mathrm{IF}}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\mathrm{IF}} = -1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\mathrm{FJ}} = 0 + 3 - 3 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FIJ) est un vecteur normal à ce plan.

b. D'après le résultat précédent on sait que :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{FIJ}) \iff -1x + 3y + 5z = d = 0$, avec $d \in \mathbf{R}$.

Or $\mathrm{F} \in (\mathrm{FIJ}) \iff -1 + 0 + 5 = d = 0 \iff d = 4$.

Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{FIJ}) \iff -x + 3y + 5z - 4 = 0$.

2. **a.** Si (d) est orthogonale au plan (FIJ), tout vecteur directeur de (d), donc en particulier $\overrightarrow{\text{B}M}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ précédent.

Il existe donc $t \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{\text{B}M} = t\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& -t\\ y-0 &=& 3t\\ z-0 &=& 5t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ y &=& 3t\\ z &=& 5t\end{array}\right.$$

Conclusion $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ y &=& 3t\\ z &=& 5t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbf{R}$.

b. $\text{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ a ses coordonnées qui vérifient les équations paramétriques de (d) et l'équation cartésienne du plan, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ y &=& 3t\\ z &=& 5t\\ -x+3y+5z-4 &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow -1+t+9t+25t-4=0 \iff 35t=5 \iff$$

$7t=1 \iff t=\dfrac{1}{7}$.

Les coordonnées de M sont donc $\text{M}\left(1-\dfrac{1}{7}\,;\,3\times\dfrac{1}{7}\,;\,5\times\dfrac{1}{7}\right)$, donc $\text{M}\left(\dfrac{6}{7}\,;\,\dfrac{3}{7}\,;\,\dfrac{5}{7}\right)$.

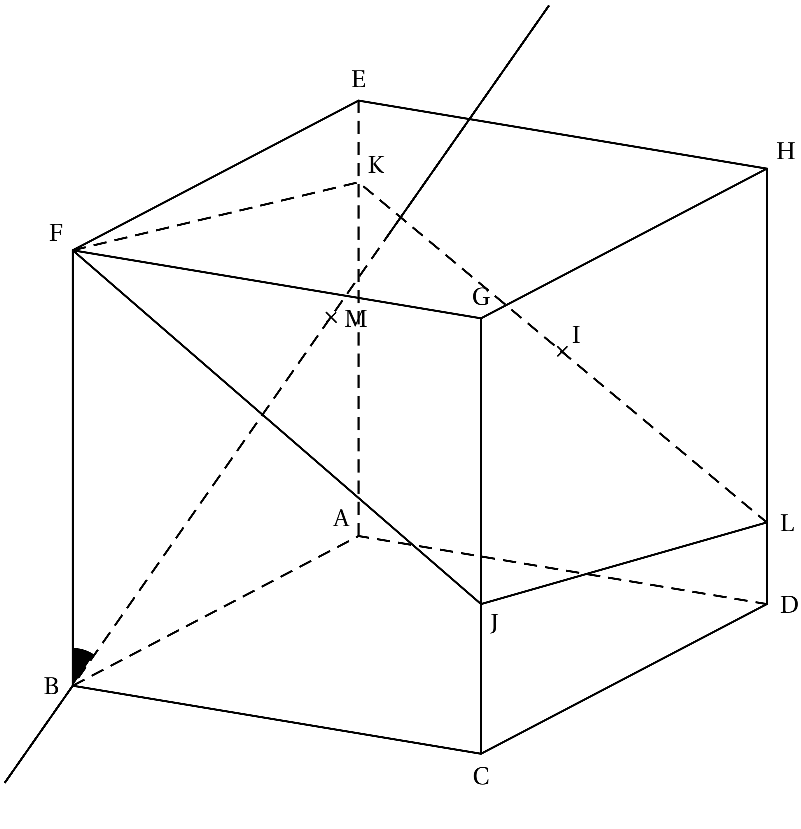


Figure 1

3. **a.** On a $\overrightarrow{\text{BM}}\begin{pmatrix}\dfrac{6}{7}-1\\ \dfrac{3}{7}\\ \dfrac{5}{7}\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{BM}}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{7}\\ \dfrac{3}{7}\\ \dfrac{5}{7}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BF}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\text{BM}}.\overrightarrow{\text{BF}}=\dfrac{5}{7}$.

b. On sait que le produit scalaire peut aussi s'écrire :

$\overrightarrow{\text{BM}}.\overrightarrow{\text{BF}} = \text{BM} \times \text{BF} \times \cos\widehat{\text{MBF}}$ (1).

De façon évidente BF = 1 ; $\text{BM}^2 = \left(-\dfrac{1}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{7}\right)^2 = \dfrac{1}{49} + \dfrac{9}{49} + \dfrac{1}{49} + \dfrac{25}{49} = \dfrac{35}{49}$.

Donc $\text{BM} = \dfrac{\sqrt{35}}{7}$.

L'égalité (1) s'écrit donc :

$\dfrac{5}{7} = 1 \times \dfrac{\sqrt{35}}{7} \times \cos\widehat{\text{MBF}} \iff \cos\widehat{\text{MBF}} = \dfrac{5}{\sqrt{35}} = \sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

La calculatrice donne $\widehat{\text{MBF}} \approx 32{,}31°$ soit 32° au degré près.

Partie B

Dans cette partie, J est un point quelconque du segment [CG].
Ses coordonnées sont donc $(1\ ;\ 1\ ;\ a)$, où a est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Les faces (BCGF) et (ADHE) sont parallèles; le plan (FIJ) les coupent donc suivant deux parallèles (FJ) et (KL).
   De même les faces (ABFE) et (DCGH) sont parallèles; le plan (FIJ) les coupent donc suivant deux parallèles (FK) et (JL).
   Le quadrilatère (FJLK) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme.

2. On a $\text{FJ}^2 = 1 + (a-1)^2$ et $\text{JL}^2 = 1 + \dfrac{a^2}{4}$.
   FKLJ est un losange si deux de ses côtés consécutifs ont la même longueur, d'où
   $\text{FJ} = \text{JL} \Rightarrow \text{FJ}^2 = \text{JL}^2 \iff 1 + (a-1)^2 = 1 + \dfrac{a^2}{4} \iff (a-1)^2 = \dfrac{a^2}{4} \iff 4(a-1)^2 = a^2 \iff$
   $4(a-1) - a^2 = 0 \iff [2(a-1)+a]\,[2(a-1)-a] = 0 \iff (3a-2)(a-2) = 0 \iff a = \dfrac{2}{3}$ ou $x = 2$.
   Or $0 \leqslant a \leqslant 1$, donc il existe une seule valeur de a pour laquelle le quadrilatère FKLJ est un losange : $a = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère l'équation (E) :

$$25z^2 - 14z + 25 = 0.$$

1. $\Delta = 14^2 - 4 \times 25 \times 25 = 196 - 2\,500 = -2\,304 = (48\text{i})^2$
   L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
   $$z_1 = \dfrac{14 + 48\text{i}}{50} = \dfrac{7 + 24\text{i}}{25} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{7 - 24\text{i}}{25}.$$

2. On a $|z_1|^2 = \left(\dfrac{7}{25}\right)^2 + \left(\dfrac{48}{25}\right)^2 = \dfrac{49 + 576}{625} = \dfrac{625}{625} = 1$, donc $|z_1| = 1$.
   Même calcul pour z_2 (conjugué de z_1).
   Les solutions de (E) sont de module 1.

3. On a $z_1 = \cos\alpha + \text{i}\sin\alpha = \text{e}^{\text{i}\alpha}$.
   On sait que $z_2 = \overline{z_1} = \overline{\text{e}^{\text{i}\alpha}} = \text{e}^{-\text{i}\alpha}$.

4. On a $\dfrac{7}{25} = \dfrac{7\times 4}{25\times 4} = \dfrac{28}{100} = 0{,}28$. La calculatrice donne aussi $\alpha \approx 74°$.
$\dfrac{24}{25} = \dfrac{24\times 4}{25\times 4} = \dfrac{96}{100} = 0{,}96$.
Les deux points représentatifs des solutions de (E) sont donc les points A et D symétriques autour de l'axe des abscisses.

Partie B

1. Affirmation A :
On sait que $\dfrac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ et que $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, donc :
$\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et par conséquent :
$\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2019\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}673\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(672\pi+\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. L'affirmation est fausse.

2. Affirmation B : On a $\|z|^2 = \left(\dfrac{2}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{4}{36} + \dfrac{25}{36} = \dfrac{29}{36}$.
Comme $\|z|^2 < 1$, $\|z\| < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |z|^n = 0$. l'affirmation est vraie.

$$\lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0.$$

3. Affirmation C :
L'indication peut s'écrire :
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - \left(1 - \cos^2(x)\right) = 2\cos^2(x) - 1$.
On a donc $\dfrac{7}{25} = 2\cos^2(a) - 1 \iff 2\cos^2(a) = 1 + \dfrac{7}{25} = \dfrac{25}{25} + \dfrac{7}{25} = \dfrac{32}{25}$, d'où
$\cos^2(a) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{32}{25} = \dfrac{32}{50}$.
Comme $-\pi \leqslant a \leqslant 0$, on a donc $\cos a = \sqrt{\frac{32}{50}}$ ou $\cos a = -\sqrt{\frac{32}{50}}$, et puisque
$\sqrt{1 - \left(\dfrac{32}{50}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{50}}$, on a dans les deux cas : $\sin a = -\sqrt{\frac{18}{50}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.
L'affirmation est vraie.

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1}+1}{5}.$$

1. • $a_2 = \dfrac{4^{4+1}+1}{5} = \dfrac{4^5+1}{5} = \dfrac{1025}{5} = 205$;
• $a_3 = \dfrac{4^{6+1}+1}{5} = \dfrac{4^7+1}{5} = \dfrac{16384+1}{5} = 3277$

2. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{4^{2(n+1)+1}+1}{5} = \dfrac{4^{2n+3}+1}{5} = \dfrac{4^{(2n+1)+2}+1}{5} = \dfrac{4^{2n+1}\times 4^2+1}{5} =$
$\dfrac{4^{2n+1}\times 4^2+16-15}{5} = \dfrac{4^{2n+1}\times 4^2+16-15}{5} = \dfrac{16\times 4^{2n+1}+16-15}{5} = 16\dfrac{4^{2n+1}+1}{5} - \dfrac{15}{5} =$
$16a_n - 3$.

3. • Par récurrence :
– $a_0 = 1$: la propriété est vraie au rang zéro;
– Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$; alors $16a_n \in \mathbb{N}$ et d'après le résultat précédent

$16a_n - 3 = a_{n+1} \in \mathbb{N}$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $a_n \in \mathbb{N}$ pour tout naturel.

- Les puissances paires de 4 se terminent par 6 et les puissances impaires par 4, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, 4^{2n+1} se termine par 4 et donc $4^{2n+1}+1$ se termine par 5 et est donc multiple de 5 : a_n est donc un naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Dans cette question on utilise l'égalité de la question **2.** afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).

a. Tout diviseur commun à a_n et à a_{n+1} et un diviseur commun à $16a_n$ et à a_{n+1}, donc est un diviseur de la différence $16a_n - a_{n+1} = 3$. Or 3 a deux diviseurs 1 et 3.

Conclusion : tout diviseur commun à a_n et à a_{n+1} et en particulier le plus grand est un diviseur de 3, donc est 1 ou 3.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $16 \equiv 1\,[3]$ et $-3 \equiv 0\,[3]$, donc $16a_n \equiv a_n\,[3]$ donc finalement $16a_n - 3 = a_{n+1} \equiv a_n[3]$.

c. On a $a_0 = 1$ et on a bien $1 \equiv 1\,[3]$.

Initialisation : le résultat précédent signifie que a_0 n'est pas divisible par 3.

Hérédité : supposons que a_n n'est pas divisible par 3 pour $n \in \mathbb{N}$; alors $16a_n$ n'est pas divisible par 3 (puisque 16 ne l'est pas) et comme 3 est divisible 3, $16a_n - 3 = a_{n+1}$ n'est pas divisible par 3.

La propriété est vraie au rang zéro, et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence a_n n'est pas un multiple de 3 pour $n \in \mathbb{N}$.

d. On a vu à la question **4. a.** que le plus grand commun diviseur d_n à a_n et à a_{n+1} était 1 ou 3. Comme on vient de voir que ce n'est pas 3, c'est donc 1 : les naturels a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Remarque : cette égalité n'est pas difficile à démontrer puisqu'elle relève de l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$b_nc_n = \left(2^{n+1}\left(2^n-1\right)+1\right)\left(2^{n+1}\left(2^n+1\right)+1\right) = \left(2^{2n+1}-2^{n+1}+1\right)\left(2^{2n+1}+2^{n+1}+1\right) = \left(2^{2n+1}+1-2^{n+1}\right)\left(2^{2n+1}+1+2^{n+1}\right) = \left(2^{2n+1}+1\right)^2 - \left(2^{n+1}\right)^2 = 2^{4n+2}+2\times 2^{2n+1}+1-2^{2n+2} = \left(2^2\right)^{2n+1}+2^{2n+2}-2^{2n+2}+1 = 4^{2n+1}+1 = 5a_n$.

5. **a.** On a donc pour $n \geqslant 2$, $\quad 5a_n = b_nc_n$. De deux choses l'une :

- ou 5 ne divise pas b_n ; comme 5 est premier et donc premier avec b_n, 5 divise le produit b_nc_n et est premiers avec b_n : d'après le théorème de Gausse 5 divise c_n ;
- ou 5 divise b_n et alors le résultat est acquis.

b. $b_n = 2^{n+1}\left(2^n-1\right)+1$, donc $n \geqslant 2 \Rightarrow 2^n \geqslant 2^2 \Rightarrow 2^n - 1 \geqslant 3$; d'autre part $n \geqslant 2 \Rightarrow n+1 \geqslant 3 \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant 2^3$, d'où par produit

$2^{n+1}\left(2^n-1\right) \geqslant 3\times 8$ et enfin $b_n \geqslant 25 > 5$.

De mà$^{\text{a}}$me $c_n = 2^{n+1}\left(2^n+1\right)+1$

$n \geqslant 2 \Rightarrow 2^n \geqslant 2^2 \Rightarrow 2^n+1 \geqslant 5$; d'autre part $n \geqslant 2 \Rightarrow n+1 \geqslant 3 \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant 2^3$, d'où par produit

$2^{n+1}\left(2^n-1\right) \geqslant 5\times 8$ et enfin $c_n \geqslant 40 > 5$.

c. On a $a_n = \dfrac{b_nc_n}{5}$.

Donc $a_n = \dfrac{b_n}{5}\times c_n$ ou $a_n = \dfrac{c_n}{5}\times b_n$.

D'après les questions précédentes $\dfrac{b_n}{5}$ ou $\dfrac{c_n}{5}$ est un naturel au moins égal à 2 puisque b_n et c_n sont supérieurs à 5 et que l'un au moins est un multiple de 5.

a_n est donc le produit de deux naturels différents de 1 : il n'est donc pas premier.